תורת הקבוצות, תרגיל 5

1. תהי A קבוצה ויהי R יחס על A (כלומר, $R \subseteq A \times A$) שהוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

א. נגדיר יחס חדש S על A בצורה הבאה: xSy אם ורק אם xRy וגם yRx. הוכח, כי S הוא יחס שקילות.

ב. נגדיר יחס T על קבוצת מחלקות השקילות של היחס S (אותה נסמן ב- $E(S)$) בצורה הבאה: $[x]T[y]$ אם ורק אם xRy. הוכח, כי היחס T הינו מוגדר היטב וכן ש- T הוא יחס סדר חלקי (מהצורה $\leq$).

ג. תהי $(B, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית ונניח שקיימת פונקציה $f : A \to B$ על, כך שמתקיים $f(x) \leq f(y)$ אם ורק אם xRy. הוכח, כי $(B, \leq)$ איזומורפית ל- $(E(S), T)$.

(תזכורת: קבוצות סדורות חלקית $(A, R), (B, S)$ נקראות איזומורפיות אם קיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל ושומרת סדר וכן הפונקציה ההפכית f^{-1} גם היא שומרת סדר).

2. א. תהיינה $(A, R), (B, S)$ קבוצות סדורות חלקית ונניח שקיימת $f : A \to B$ חח"ע ועל ושומרת סדר (כלומר, אם xRy אז מתקיים $f(x)Sf(y)$). האם בהכרח (A, R) איזומורפית ל- (B, S)?

ב. אותה שאלה כמו בסעיף א' אם נתון בנוסף ש- A סדורה מלא (כלומר, כל שני איברים ניתנים להשוואה).

ג. אותה שאלה כמו בסעיף א' אם נתון בנוסף ש- B סדורה מלא.

ד. אותה שאלה כמו בסעיף א' אם נתון בנוסף ש- A ו- B סדורות מלא.

3. תהי $(A, \leq)$ קבוצה סדורה היטב. הוכח, שלכל איבר $x \in A$ שאינו האיבר המקסימלי של A יש עוקב מיידי, כלומר, קיים $y \in A$ כך, שמתקיים $x < y$ וכן אם מתקיים $x < z$ עבור $z \in A$ אז בהכרח $y \leq z$.

4. שאלה זו עוסקת ביחס הסדר הלקסיקוגרפי (מילוני).

א. נתבונן בקבוצה $N \times N$ עם יחס הסדר המילוני: $(x, y)R(z, w)$ אם ורק אם $x < z$ או $x = z, y \leq w$. הוכח, כי $(N \times N, R)$ הינה קבוצה סדורה היטב.

ב. נתבונן בקבוצת הסדרות של מספרים טבעיים A עם הסדר המילוני: $\{a_n\}S\{b_n\}$ אם ורק אם קיים $n \in N$ כך, ש- $a_k = b_k$ לכל $k < n$ וכן $a_n < b_n$. האם (A, S) הינה קבוצה סדורה היטב?

5. תהי $(A, \leq)$ קבוצה סדורה מלא. הוכח, כי אם כל רישא של $(A, \leq)$ היא סופית אז $(A, \leq)$ היא קבוצה סדורה היטב.

תאריך ההגשה: 30.3.2005